CAPESA 2008- ANALYSE

G. Allain, UPEC

1 Première partie

1. Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc on étudie la convergence des intégrales en $+\infty$. On a $\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$ et cette intégrale tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge.
Comme pour tout $t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$, la convergence de l'intégrale précédente entraîne la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

2.a. C_r est un carré, Q_r est un quart de disque de rayon r et Q'_r est un quart de disque de rayon $r\sqrt{2}$ avec $Q_r \subset C_r \subset Q'_r$.
b. Comme la fonction f est positive, on a $J_r \leq I_r \leq J'_r$.
c. On a, en passant en coordonnées polaires $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$,

$$J_r = \int\int_{[0,\pi/2]\times[0,r]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_0^r \rho e^{-\rho^2}(\int_0^{\pi/2} d\theta)d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}]_0^r = \frac{\pi(1-e^{-r^2})}{4}$$

Par suite $J'_r = J_{r\sqrt{2}} = \frac{\pi(1-e^{-2r^2})}{4}$
d. En utilisant la formule de Fubini,

$$I_r = \int\int_{[0,r]\times[0,r]} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = (\int_0^r e^{-x^2}dx)(\int_0^r e^{-y^2}dy) = (\int_0^r e^{-t^2}dt)^2$$

D'où la double inégalité demande.
e. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente (on a vu en a ; que les limites existaient) on obtient $(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt)^2 = \frac{\pi}{4}$ et donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2 Deuxième partie

1. $t \mapsto t^x e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En 0, on a $t^x e^{-t} \sim t^x$ donc l'intégrale de $t^x e^{-t}$ converge en 0 si et seulement si $x > -1$. En $+\infty$, on a $t^x e^{-t} = O(e^{-t/2})$ (en fait, $o(e^{-t/2})$, mais O suffit), et comme l'intégrale de $e^{-t/2}$ converge en $+\infty$, c'est le cas aussi pour $t^x e^{-t}$. Finalement $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ converge si et seulement si $x > -1$, et Γ est dédinie pour $x > 0$.
2. a. Γ est positive sur $\mathbb{R}+^*$.

b. On a pour $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \geq e^{-1}\int_0^x t^{x-1}dt = \frac{1}{ex}$ donc $\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x) = +\infty$.
3. a. On fait une intégration par parties, qui est justifiée car les fonctions utilisées sont de classe

C^1 et parce que tous les termes ont une limite quand les bornes tendent vers 0 et $+\infty$.
b. Faire une récurrence sur la propriété définie pour tout $n \geq 1 : P_n : \Gamma(n) = (n-1)!$
4. a. En utilisant le changement de variable $t = s^2, dt = 2sds$, et la première partie,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s}2sds = 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}$$

b. Par récurrence similaire à la précédente (il n'est peut-tre pas utile de la faire si cela a été bien fait avant...)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

On multiplie en haut et en bas par tous les nombres pairs de 2 à $2n$, c'est-à-dire par $2^n n!$ et on trouve

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

5. (Pour cette question revoir les intégrales de Bertrand.) On prend $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction sur $]0,1] : t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$ est de signe constant, équivalente en 0 à $u : t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1}$. Or en prenant $x' \in]0, x[$, $u(t) = O(t^{x'-1})$ car le quotient de u avec $t^{x'-1}$ tend vers 0. Comme l'intégrale de $t \mapsto t^{x'-1}$ converge en 0, il en est de même pour $t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$.
Pour la convergence en $+\infty$, on a :

$$(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t} = (\frac{\ln t}{t})^k t^{k+x-1}e^{-t} = O(t^{k+x-1}e^{-t}) = O(e^{-t/2})$$

Comme l'intégrale de $t \mapsto e^{-t/2}$ converge en $+\infty$, c'est le cas aussi pour $t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$. (Je ne vois pas pour quoi il faut distinguer $x > 1$ ou non...)
b. Soit $v : x \mapsto t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$. La fonction v est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = (\ln t)t^{x-1}, v''(x) = (\ln t)^2 t^{x-1}$. On a

$$|v(x) - v(x_0) - v'(x_0)(x-x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2}\sup_{y\in[x,x_0]}|v''(y)|$$

Or suivant que $t \geq 1$ ou $t < 1$, $y \mapsto t^{y-1}$ est croissante ou décroissante, donc pour $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, si $t \geq 1$,

$$\sup_{y\in[x,x_0]}|v''(y)| \leq t^{x_0+\alpha-1}$$

et si $t < 1$,

$$\sup_{y\in[x,x_0]}|v''(y)| \leq t^{x_0-\alpha-1}$$

ce qui conduit aux inégalités demandées.
Par suite, si de plus $x \neq x_0$,

$$\Big|\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0} - \int_0^{+\infty}(\ln t)t^{x_0-1}e^{-t}dt\Big| \leq \Big(\int_0^1 \frac{(x-x_0)}{2}(\ln t)^2 t^{x_0-\alpha-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty}\frac{(x-x_0)}{2}(\ln t)^2 t^{x_0+\alpha-1}e^{-t}dt\Big)$$

$$\leq M_1|x-x_0|$$

avec $M_1 = \int_0^1 \frac{1}{2}(\ln t)^2 t^{x_0-\alpha-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\ln t)^2 t^{x_0+\alpha-1}e^{-t}dt$
On en déduit que Γ est dérivable en x_0 et que

$$\Gamma'(x_0) = \int_0^{+\infty}(\ln t)t^{x_0-1}e^{-t}dt$$

Par la même méthode,

$$\Big|\frac{\Gamma'(x)-\Gamma'(x_0)}{x-x_0} - \int_0^{+\infty}(\ln t)^2 t^{x_0-1}e^{-t}dt\Big| \leq \Big(\int_0^1 \frac{(x-x_0)}{2}(\ln t)^3 t^{x_0-\alpha-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty}\frac{(x-x_0)}{2}(\ln t)^3 t^{x_0+\alpha-1}e^{-t}dt\Big)$$

$$\leq M_2|x-x_0|$$

avec $M_2 = \int_0^1 \frac{1}{2}(\ln t)^3 t^{x_0-\alpha-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(\ln t)^3 t^{x_0+\alpha-1}e^{-t}dt$
Cela prouve que Γ' est dérivable et

$$\Gamma''(x_0) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x_0-1}e^{-t}dt$$

Γ'' étant positive ou nulle pour $x > 1$, la fonction Γ est convexe sur $]1, +\infty[$.

6. a.On admet que la formule de $\Gamma''(x)$ ci-dessus est encore valable pour $x > 0$. Comme l'intégrale d'une fonction continue positive ou nulle est nulle si et seulement si la fonction intégrée est identiquement nulle sur l'intervalle considéré, par contraposée, puisque $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$ n'est pas nulle, on a $\forall x > 0, \Gamma''(x) > 0$. Il en résulte que Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}+^*$.
b. On a $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ et Γ, qui est dérivable, est continue sur $\mathbb{R}+^*$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma(x) = \lim_{x\to 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$$

et donc en 0, $\Gamma(x) \sim 1/x$.
c. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Comme Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}+^*$, x_0 est unique dans $\mathbb{R}+^*$.
d. Compiler les résultats obtenus...

3 Troisième partie

1. $w : t \mapsto (1 - t/n)^n t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0, n]$. En 0, $w(t) \sim t^{x-1}$ qui a une intégrale convergente car $x > 0$. Donc J_n converge.

2. Pour $t \leq n$, $u_n(t) = \exp n \ln(1 - t/n)$. On utilise l'inégalité de Bernoulli pour $s > -1$: $\ln(1 + s) \leq s$ pour obtenir $u_n(t) \leq e^{-t}$. (On peut aussi étudier $t \mapsto u_n(t) - e^{-t}$.)

3. Utilisons le théorème de convergence dominée : on a pour x fixé, en posant $\phi(t) = e^{-t}t^{x-1}$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \forall n, |u_n(t)| \leq \phi(t)$$

où ϕ est intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\forall t \in]0, +\infty[, \lim_{n\to\infty} u_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$$

donc d'après le théorème, $\lim J_n(x) = \Gamma(x)$.
Oui, mais.... en 2008, le théorème de convergence dominée n'était pas au programme.... L'auteur n'a pas l'air de le savoir.
Autre démonstration : Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 2N$,

$$|\Gamma(x) - J_n(x)| \leq \int_0^N |(1 - \frac{t}{n})^n - e^{-t}|t^{x-1}dt + \int_N^n u_n(t)t^{x-1}dt + \int_N^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$\leq \int_0^N |(1 - \frac{t}{n})^n - e^{-t}|t^{x-1}dt + 2\int_N^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

Soit $\epsilon > 0$. Fixons N pour que $2\int_N^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt < \epsilon$, ce qui est possible car cette intégrale tend vers 0 quand N tend vers l'infini (reste d'une intégrale convergente).

On a pour $t \leq N$,

$$|(1 - \frac{t}{n})^n - e^{-t}| = e^{-t}|e^{n\ln(1-\frac{t}{n})+t} - 1| \leq e^{-t}|n\ln(1 - \frac{t}{n}) + t|$$

$$\leq e^{-t} n(N/n)^2 C$$

avec $C = sup_{h\in[0,1/2]}|\frac{ln(1-h)+h}{h^2}|$. Il en résulte que pour n assez grand, $\int_0^N |(1-\frac{t}{n})^n - e^{-t}|t^{x-1}dt \leq \epsilon$ ce qui montre que $\lim J_n(x) = \Gamma(x)$.

3. a. $\beta(a,b)$ est l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $]0,1[$. En 0 cette fonction est équivalente à t^{b-1} qui est intégrable,car $b>0$ et en 1 elle est équivalente à $(1-t)^{a-1}$ qui est intégrable car $a>0$. Donc $\beta(a,b)$ existe.
b. $n^x\beta(n+1,x) = n^x\int_0^1(1-t)^n t^{x-1}dt = \int_0^n(1-\frac{s}{n})^n s^{x-1}ds = J_n(x)$ donc $\Gamma(x) = \lim n^x\beta(n+1,x)$.
c. i. On a :

$$\beta(a+1,b)+\beta(a,b+1) = \int_0^1((1-t)^a t^{b-1} + (1-t)^{a-1}t^b)dt = \int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}(1-t+t)dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt = \beta(a,b)$$

ii. $\beta(a,b+1) = \frac{b}{a}\beta(a,b)$ par intégration par parties.
iii. Ainsi $\beta(a+1,b)(1+\frac{b}{a}) = \beta(a,b)$ donc $\beta(a+1,b) = \frac{a}{a+b}\beta(a,b)$.
d. $\beta(n+1,x) = \frac{n}{n+x}\beta(n,x)$. Par récurrence, on obtient

$$\beta(n+1,x) = \frac{n!}{((x+1)\cdots(x+n)}\beta(1,x)$$

avec $\beta(1,x) = \frac{1}{x}$ d'où le résultat.

4. a. Faire le changement de variable $t = \cos^2\theta, 0<\theta<\pi/2$.
b. Dans $\Gamma(x)$ faire le changement $t = s^2$.

5. $\Gamma_r(x)\Gamma_r(y) = 4\int\int_{C_r} e^{-u^2-v^2}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv$.

6. La fonction intégrée étant positive,

$$4\int\int_{Q_r} e^{-u^2-v^2}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv \leq \Gamma_r(x)\Gamma_r(y) \leq 4\int\int_{Q'_r} e^{-u^2-v^2}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv$$

Or en prenant $u = \rho\cos\theta, v = \rho\sin\theta$,

$$4\int\int_{Q_r} e^{-u^2-v^2}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv = 4\int_0^r\int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\rho^{2x+2y-2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\Gamma_r(x+y)\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta = \Gamma_r(x+y)\beta(x,y)$$

D'où l'inégalité demandée.
En passant à la limite quand r tend vers $+\infty$ on obtient

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$$

.

4 Quatrième partie

1. Pour $p < 1$, la courbe est décroissante sur $\mathbb{R} + *$ avec une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et une asymptote verticale $x = 0$.
Pour $p = 1$, la courbe est décroissante sur $\mathbb{R} + *$ avec une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et la fonction a une limite en 0^+ avec une demi-tangente oblique.
Pour $1 < p < 2$, la courbe est croissante jusqu'à $x = p - 1$ puis décroissante avec une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. Elle part du point O avec une demi-tangente verticale.
Pour $p = 2$, la courbe est croissante jusqu'à $x = p - 1$ puis décroissante avec une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. Elle part du point O avec une demi-tangente oblique.
Pour $p > 2$, la courbe est croissante jusqu'à $x = p - 1$ puis décroissante avec une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. Elle part du point O avec une demi-tangente horizontale.

2. Avec le changement de variable $x' = \frac{x}{b}$, on trouve que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ et donc que f est une densité de probabilité. (Evidemment, f est positive ou nulle).

3. La variable X admet une espérance et une variance si les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ existent, ce qui est le cas (cf II.1.).

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^p e^{-\frac{x}{b}}}{b^p \Gamma(p)} dx = \int_0^{+\infty} b \frac{x'^p e^{-x'}}{\Gamma(p)} dx = b\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = bp$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1} e^{-\frac{x}{b}}}{b^p \Gamma(p)} dx - b^2p^2 = \int_0^{+\infty} b^2 \frac{x'^{p+1} e^{-x'}}{\Gamma(p)} dx - b^2p^2$$
$$= b^2 \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)} - b^2p^2 = b^2p(p+1) - b^2p^2 = b^2p$$

4. Pour $p = 1$ on a pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{b} e^{\frac{-x}{b}}$. Il s'agit d'une loi exponentielle d'espérance b. On a alors $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et pour $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1 - e^{\frac{-x}{b}}$$

5. On sait que $X_1 + X_2$ possède la densité h définie par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)^{p_1-1} \frac{e^{\frac{-x+t}{b}}}{b^{p_1}\Gamma(p_1)} t^{p_2-1} \frac{e^{\frac{-t}{b}}}{b^{p_2}\Gamma(p_2)} \chi(x,t)dt$$

avec $\chi(x,t) = 1$ si $0 < t < x$ et $\chi(x,t) = 0$ sinon. Donc $h(x) = 0$ si $x \leq 0$ et pour $x > 0$,

$$h(x) = \frac{e^{\frac{-tx}{b}}}{b^{p_1+p_2}\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} \int_0^x (x-t)^{p_1-1} t^{p_2-1} dt = \frac{e^{\frac{-tx}{b}}}{b^{p_1+p_2}\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} x^{p_1+p_2-1} \int_0^1 (1-s)^{p_1-1} s^{p_2-1} ds$$

$$= \frac{e^{\frac{-tx}{b}}}{b^{p_1+p_2}\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} x^{p_1+p_2-1} \beta(p_1,p_2) = \frac{e^{\frac{-tx}{b}}}{b^{p_1+p_2}\Gamma(p_1+p_2)} x^{p_1+p_2-1}$$

Donc $X_1 + X_2$ suit la loi $\Gamma(b, p_1 + p_2)$.

6. Pour $n \geq 1$ on définit la propriété P_n : $X_1 + \cdots + X_n$ *suit la loi* $\Gamma(b, p_1 + \cdots + p_n)$
P_1 est vérifiée par hypothèse.
Soit $n \geq 1$. Si P_n est vraie, comme X_{n+1} et $X_1 + \cdots + X_n$ sont indépendantes, alors d'après la question 5, $X_1 + \cdots + X_{n+1} = (X_1 + \cdots + X_n) + X_{n+1}$ suit la loi $\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n+1})$ donc la

propriété est vraie pour $n+1$: elle est héréditaire.
Par le théorème de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

7. $E(X) = 2.\frac{s}{2} = s, V(X) = 2^2\frac{s}{2} = 2s$. Avec les hypothèses, en utilisant 6., la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$ est $\Gamma(2, ns/2) = \chi^2(ns)$.

8. On utilise la formule de Taylor avec reste-intégrale pour $g(t) = e^t$:

$$g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k = \int_0^x \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dt = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(x-t)dt$$

9.

$$P(X_{2n} > 2\lambda) = 1 - \int_0^{2\lambda} \frac{t^{n-1}e^{\frac{-t}{2}}}{2^n\Gamma(n)}dt = 1 - \int_0^{\lambda} \frac{s^{n-1}e^{-s}}{(n-1)!}ds$$

$$= 1 - e^{-\lambda}\int_0^{\lambda} \frac{s^{n-1}e^{\lambda-s}}{(n-1)!}ds = 1 - e^{-\lambda}(e^{\lambda} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} P(Y_\lambda = k) = P(Y_\lambda < n)$$

10. $F_4(k) = P(X_4 \leq k) = 1 - P(X_4 > k) = 1 - P(Y_2 < \frac{k}{2}) = 1 - \sum_{0 \leq j < \frac{k}{2}} P(Y_2 = j)$

11. On sait que

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt$$

Donc pour $y \geq 0$,

$$P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt$$

$$= \int_0^y \frac{e^{\frac{-t'}{2}}}{\sqrt{2\pi t'}}dt'$$

Donc X^2 suit la loi du $\chi^2(1)$.

12. Si $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $X_1^2, \cdots, X_n^2$ le sont aussi donc $\sum X_i^2$ suit la loi $\chi^2(n)$.

5 Cinquième partie

1. a. On retrouve ou on donne le résultat concernant la loi binomiale.
$E(X_i) = np_i, Var(X_i) = np_i(1-p_i)$.

b. Pour $i \neq j$, la loi de la variable $X_i + X_j$ consiste à calculer les probabilités du tirage de k boules de couleur C_i ou C_j, donc c'est la même que celle qu'on obtiendrait en remplaçant les boules de couleur C_i et C_j par des boules d'une seule couleur C' en proportion $p_i + p_j$. Ainsi c'est la loi binomiale de paramètre $p_i + p_j$. On en déduit en utilisant la formule

$$Var(X_i + X_j) = Var(X_i) + Var(X_j) + 2Cov(X_i, X_j)$$

que

$$n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) = np_i(1 - p_i) + np_j(1 - p_j) + 2Cov(X_i, X_j)$$

et donc $Cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$.

2. A. La covariance étant bilinéaire, et inchangée quand on ajoute une constante à une des variables, on obtient pour $i \neq j$

$$Cov(Y_i, Y_j) = \frac{1}{\sqrt{np_i}\sqrt{np_j}} Cov(X_i, X_j) = -\sqrt{p_ip_j}$$

D'autre part, $Cov(Y_i, Y_i) = Var(Y_i) = \frac{1}{np_i} Var(X_i) = 1 - p_i$.
b. $P = C \quad {}^tC$ avec

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \vdots \\ \sqrt{p_k} \end{pmatrix}$$

c. Toutes les lignes de P sont colinéaires et au moins une est non nulle puisqu'il existe un p_i non nul (la somme fait 1), donc P est de rang 1.
d. $P^2 = C\,{}^tC C\,{}^tC = C(p_1 + \cdots + p_k)\,{}^tC = P$.
Les valeurs propres de la matrice symétrique P sont réelles , et il y en a k, comptées avec leur multiplicité car elle est diagonalisable. Comme $P^2 - P = 0$ on sait que les valeurs propres vérifient $\lambda^2 - \lambda = 0$, donc c'est 0 ou 1. On sait que 0 est valeur propre de multiplicité $k - 1$ car $\dim \ker P + rang(P) = k$. La seule possibilité est donc que 1 est valeur propre simple.

3. $M = I - P$ donc la matrice M admet 1 pour valeur propre de multiplicité $k - 1$ et 0 pour valeur propre simple. Comme elle est symétrique, il existe une base orthonormée de vecteurs propres. Si on note S la matrice de passage de la base canonique à cette base, on obtient $S\,{}^tS = I$ et ${}^tSMS = J$ où J est la matrice diagonale avec des coefficients diagonaux $(1, 1, \cdots, 1, 0)$.

4. a. L'espérance étant linéaire, on a

$$\begin{pmatrix} E(Z_1) \\ \vdots \\ E(Z_k) \end{pmatrix} = {}^tS \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc les Z_i sont centrées.
b. Comme les variables sont centrées, on a $Cov(Z_i, Z_j) = E(Z_iZ_j)$ donc la matrice de covariance M' des Z_j est l'espérance de la matrice (Z_iZ_j). On a $(Z_iZ_j) = D\,{}^tD$ avec

$$D = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$(Z_iZ_j) = {}^tS \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} (Y_1 \cdots Y_k) S$$

et en passant à l'espérance de chaque terme, $M' = {}^tSMS = J$. Il en résulte que $Cov(Z_k, Z_k) = 0 = E(Z_k^2)$ et que $Z_k = 0$.
c. La matrice S est orthogonale donc $Q = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i^2$.
d. La loi de Y_i va être approchée par une loi normale centrée réduite.
e. D'après la question IV-12, Q suit une loi du χ^2 à $k - 1$ degrés de liberté.